Funciones de Green asociadas a problemas de Sturm-Liouville en un camino

Bendito, E.; Carmona, A.; Encinas, A.M.; Gesto, J.M. *

Matemàtica Aplicada III
UPC,
Jordi Girona Salgado 1-3, 08034 Barcelona
`angeles.carmona@upc.edu`

Resumen. En este trabajo describimos las funciones de Green asociadas con los distintos problemas de contorno tipo Sturm-Liouville en un camino. Concretamente, estudiamos los problemas de Dirichlet, Neumann y mixtos. En todos los casos las funciones están dadas en términos de los polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie ya que estos satisfacen una recurrencia similar a la ecuación en diferencias que verifica el operador de Schödinger.

Palabras clave. Funciones de Green, problemas de contorno, polinomios de Chevyshev, medida de equilibrio

1. Introducción

La función de Green puede ser usada para el estudio de problemas de difusión en grafos, tales como el tiempo de encuentro, *chip-firing*, algoritmos de balances de cargas y cadenas de Markov discretas. El motivo es que estos problemas se escriben en términos de problemas de contorno para el operador de Laplace asociado a la red y la función de Green es el núcleo resolvente de dicho operador. Por tanto, las funciones de Green constituyen una poderosa herramienta para tratar un amplio rango de problemas de tipo combinatorio, ver [2, 3, 4, 6].

Los autores obtuvieron en [2] la expresión de las funciones de Green para problemas de contorno autoadjuntos en un subconjunto arbitrario de una red en términos de medidas de equilibrio. Dichas medidas se pueden hallar por métodos iterativos o como la solución de un problema de programación lineal y en algunos casos en los que la red presenta simetrías pueden ser obtenidas mediante cálculos elementales.

En el caso unidimensional la construcción explícita de la función de Green es un proceso intuitivo y mecánico si uno tiene a su disposición dos soluciones

*Parcialmente financiado por la ETSECCPB y por el proyecto BFM2003-06014.

independientes del problema homogéneo asociado a la ecuación en diferencias que gobierna el fenómeno físico. En este trabajo nos centramos en el caso de un camino, dado que para este tipo de grafos se pueden encontrar fácilmente dos soluciones independientes. Concretamente, dichas soluciones están dadas a través de los Polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie. Un trabajo similar puede llevarse a cabo para problemas en los que la frontera consta de un solo nodo, para problemas periódicos y para problemas sobre el camino completo. Dicho estudio será abordado en un trabajo posterior.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, P_n denotará el camino de $n+2$ vértices, es decir $P_n = \{0,\dots,n+1\}$, mientras que $\mathscr{L}$ denotará el operador *Laplaciano de* P_n. Nuestro primer objetivo será obtener los operadores integrales inversos del *operador de Schrödinger* $\mathscr{L}_q = \mathscr{L} + 2q$, ver [5], asociados a cada subconjunto de P_n y a cada familia de condiciones de contorno autoadjuntas, donde $q \in [0,+\infty)$.

Obsérvese que, para cada $z \in \mathscr{C}(P_n)$,

$$\mathscr{L}_q z(i) = 2(1+q)z(i) - z(i+1) - z(i-1), \quad i = 1,\dots,n. \tag{1}$$

Por tanto para resolver el problema planteado, será útil la consideración de los *polinomios de Chebyshev* ya que estos verifican una relación de recurrencia del tipo

$$P_{i+2}(x) = 2x P_{i+1}(x) - P_i(x). \tag{2}$$

Si consideramos la solución de (2) que verifica las condiciones iniciales $T_0(x) = 1$, y $T_1(x) = x$, entonces obtenemos los polinomios de Chebyshev de primera especie, $\{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Mientras que si consideramos la solución de (2) que verifica las condiciones iniciales $U_0(x) = 1$, y $U_1(x) = 2x$, entonces obtenemos los polinomios de Chebyshev de segunda especie $\{U_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Consideremos ahora la función $\phi : [1,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty)$ dada por $\phi(r) = \frac{1}{2}(r + r^{-1})$. Se comprueba fácilmente que ϕ es un homeomorfismo y que $\phi^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2-1}$.

Sea ahora $x \in [1,+\infty)$ y consideremos $r \in [1,+\infty)$ tal que $\phi(r) = x$. Entonces, se verifican las identidades

$$T_n(x) = \frac{r^n + r^{-n}}{2} \quad \text{y} \quad U_n(x) = \frac{r^{n+1} - r^{-(n+1)}}{r - r^{-1}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Para otras propiedades y relaciones entre los polinomios de las distintas especies remitimos al lector a [1].

El estudio de problemas de contorno sobre subconjuntos propios puede reducirse fácilmente al estudio sobre subconjuntos conexos ya que la función de

Green se reduce en el primer caso a las funciones de Green de las diferentes componentes conexas. Por tanto, a lo largo del trabajo denotaremos por F a cualquier subconjunto propio y conexo de P_n.

2. Funciones de Green para problemas de Sturm-Lioville

En este caso la situación se reduce fácilmente al análisis del caso en el que $F = \{1,\ldots,n\}$.

Plantearemos los diferentes problemas de contorno autoadjuntos de tipo *Sturm-Liouville* (que tienen sentido físico) asociados al operador $\mathscr{L}_q$, es decir, los problemas de *Dirichlet, Neumann, Robin y Mixtos*. Todos ellos pueden formularse en la forma

$$\mathscr{L}_q(z) = f \quad \text{en} \quad F, \qquad \mathscr{U}_1(z) = \mathscr{U}_2(z) = 0, \tag{4}$$

donde $f \in \mathscr{C}(F)$ y

$$\begin{aligned} \mathscr{U}_1(z) = &\quad h_1 z(0) + \alpha\Big(z(0) - z(1)\Big), & \alpha h_1 \geq 0,\ \ |h_1| + |\alpha| > 0,\\ \mathscr{U}_2(z) = &\quad h_2 z(n+1) + \beta\Big(z(n+1) - z(n)\Big), & \beta h_2 \geq 0,\ \ |h_2| + |\beta| > 0. \end{aligned}$$

En lo sucesivo asumiremos, sin pérdida de generalidad, que $h_1, h_2, \alpha, \beta \geq 0$. Obsérvese que el valor $z(0) - z(1)$ corresponde a la derivada normal en el vértice 0, mientras que $z(n+1) - z(n)$ es la derivada normal en $n+1$.

El hecho de ser $\mathscr{L}_q$ un operador autoadjunto implica que si tomamos u y v tales que $\mathscr{L}_q(u) = \mathscr{L}_q(v) = 0$, entonces el *wronskiano de u y v*, es decir

$$w[u,v](k) = u(k)v(k+1) - u(k+1)v(k), \qquad k = 0,\ldots,n$$

es constante.

2.1. Problemas regulares autoadjuntos

Con las hipótesis efectuadas, la condición $q + h_1 + h_2 > 0$ es equivalente a que el problema (4) sea *regular*, es decir a que el correspondiente problema homogéneo tenga como única solución la trivial o, expresado de otra manera, para cada $f \in \mathscr{C}(F)$ el problema (4) tiene solución única. En este caso, la *Función de Green*, G_q del problema de contorno (4) está caracterizada por satisfacer $G_q \in \mathscr{C}(P_n \times F)$ y para cada $s \in F$ las ecuaciones

$$\mathscr{L}_q(G_q(\cdot,s)) = \varepsilon_s \quad \text{en} \quad F, \qquad \mathscr{U}_1(G_q(\cdot,s)) = \mathscr{U}_2(G_q(\cdot,s)) = 0. \tag{5}$$

Si u y v son no nulas y satisfacen que $\mathscr{L}_q(u) = \mathscr{L}_q(v) = 0$ en F y $\mathscr{U}_1(u) = \mathscr{U}_2(v) = 0$, entonces la regularidad del problema de contorno (4) implica que

$\mathscr{U}_2(u), \mathscr{U}_1(v) \neq 0$ y que $\{u,v\}$ es base de soluciones de la ecuación $\mathscr{L}_q(v) = 0$ en F, de manera que fijado $s \in F$, $G_q(\cdot,s)$ debe satisfacer

$$G_q(k,s) = \begin{cases} a(s)\,u(k) + b(s)\,v(k), & 0 \leq k \leq s, \\ \hat{a}(s)\,u(k) + \hat{b}(s)\,v(k), & s \leq k \leq n. \end{cases}$$

Como además $0 = \mathscr{U}_1(G_q(\cdot,s)) = a(s)\,\mathscr{U}_1(u) + b(s)\,\mathscr{U}_2(v) = b(s)\,\mathscr{U}_2(v)$, necesariamente $b = 0$ y un razonamiento análogo prueba que $\hat{a} = 0$.

Por otra parte $G_q(s,s) = a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) = \hat{a}(s)\,u(s) + \hat{b}(s)\,v(s)$, es decir teniendo en cuenta que $b = \hat{a} = 0$, $a(s)\,u(s) - \hat{b}(s)\,v(s) = 0$, lo que implica que $a(s) = \alpha(s)\,v(s)$ y $\hat{b}(s) = \alpha(s)\,u(s)$ y por tanto que

$$G_q(k,s) = \alpha(s) \begin{cases} u(k)\,v(s), & 0 \leq k \leq s, \\ u(s)\,v(k), & s \leq k \leq n+1. \end{cases}$$

Finalmente, el valor de $\alpha(s)$ se obtiene de la identidad $\mathscr{L}_q(G(\cdot,s))(s) = 1$. Algunos cálculos sencillos conducen al valor $\alpha(s) = \dfrac{1}{w[u,v]}(s)$, donde se ha tenido en cuenta que $w[u,v]$ es no nulo ya que $\{u,v\}$ es base de soluciones de la ecuación homogénea $\mathscr{L}_q(v) = 0$. En definitiva, resulta que para cada $1 \leq s \leq n$

$$G_q(k,s) = \frac{-1}{w[u,v]} \begin{cases} u(k)\,v(s), & 0 \leq k \leq s, \\ u(s)\,v(k), & s \leq k \leq n+1. \end{cases} \tag{6}$$

Observar que la función de Green es simétrica en F, propiedad equivalente al carácter autoadjunto del problema (4).

El cálculo explícito de la Función de Green de (4) depende por tanto del conocimiento de las soluciones de la ecuación homogénea $\mathscr{L}_q(z) = 0$, es decir de la ecuación en diferencias

$$z(k+2) - 2(1+q)\,z(k+1) + z(k) = 0, \qquad k = 0, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Como el polinomio característico de la ecuación anterior es $P_c(x) = x^2 - 2(1+q)x + 1$, resulta que si consideraremos $r \geq 1$ tal que $r + r^{-1} = 2(1+q)$, es decir $r = 1 + q + \sqrt{2+q}$, entonces r y r^{-1} son las raíces de P_c, lo que implica que una base de soluciones de la ecuación (7) es $\{r^k, r^{-k}\}$ si $r > 1$ y $\{1, k\}$ si $r = 1$. Teniendo en cuenta las expresiones (3), resulta que en cualquier caso, el conjunto de soluciones de (7) está descrito por la identidad

$$z(k) = a\,T_k(1+q) + b\,U_{k-1}(1+q), \qquad k = 0, \ldots, n+1, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Teniendo en cuenta la expresión (8), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{U}_1(z) &= a\,(h_1-\alpha\,q)-b\,\alpha,\\
\mathscr{U}_2(z) &= a\Big[(h_2+\beta)\,T_{n+1}(1+q)-T_n(1+q)\Big]\\
&\quad + b\Big[(h_2+\beta)\,U_n(1+q)-U_{n-1}(1+q)\Big].
\end{aligned}$$

y por tanto podemos tomar

$$\begin{aligned}
u(k) &= \alpha\,\Big[T_k(1+q)-q\,U_{k-1}(1+q)\Big]+h_1U_{k-1}(1+q),\\
v(k) &= \Big[(h_2+\beta)\,U_n(1+q)-U_{n-1}(1+q)\Big]\,T_k(1+q)\\
&\quad - \Big[(h_2+\beta)\,T_{n+1}(1+q)-T_n(1+q)\Big]\,U_{k-1}(1+q)\\
&= (h_2+\beta)\,\Big[U_n(1+q)T_k(1+q)-T_{n+1}(1+q)U_{k-1}(1+q)\Big]\\
&\quad + T_n(1+q)\,U_{k-1}(1+q)-U_{n-1}(1+q)\,T_k(1+q)\\
&= (h_2+\beta)\,U_{n-k}(1+q)-U_{n-k-1}(1+q).
\end{aligned}$$

Haciendo uso de algunas propiedades fundamentales de los polinomios de Chebyshev se llega a la siguiente expresión para la base de soluciones

$$\begin{aligned}
u(k) &= \quad (h_1+\alpha)U_{k-1}(1+q)-\alpha U_{k-2}(1+q)\\
v(k) &= \quad (h_2+\beta)U_{n-k}(1+q)-\beta U_{n-k-1}(1+q),
\end{aligned} \tag{9}$$

lo que implica que

$$w[u,v]=(h_2\alpha+h_1\beta-2q\alpha\beta)U_{n-1}(1+q)-(h_1h_2+h_2\alpha+h_1\beta)U_n(1+q). \tag{10}$$

En definitiva, bajo la hipótesis $q+h_1+h_2>0$, para cada $1\le s\le n$, la función de Green del problema de contorno (4) está dada por

$$G_q(k,s)=\frac{\Big((h_1+\alpha)U_{k-1}(1+q)-\alpha U_{k-2}(1+q)\Big)\Big((h_2+\beta)U_{n-s}(1+q)-\beta U_{n-s-1}(1+q)\Big)}{(h_1h_2+h_2\alpha+h_1\beta)U_n(1+q)-(h_2\alpha+h_1\beta-2q\alpha\beta)U_{n-1}(1+q)},$$

para cada $0\le k\le s$ y

$$G_q(k,s)=\frac{\Big((h_1+\alpha)U_{s-1}(1+q)-\alpha U_{s-2}(1+q)\Big)\Big((h_2+\beta)U_{n-k}(1+q)-\beta U_{n-k-1}(1+q)\Big)}{(h_1h_2+h_2\alpha+h_1\beta)U_n(1+q)-(h_2\alpha+h_1\beta-2q\alpha\beta)U_{n-1}(1+q)},$$

para cada $s\le k\le n+1$.

En particular, si $q=0$, entonces para cada $1\le s\le n$,

$$G_0(k,s)=\begin{cases}\dfrac{(h_1k+\alpha)\Big(h_2(n+1-s)+\beta)\Big)}{h_1h_2(n+1)+h_2\alpha+h_1\beta}, & 0\le k\le s,\\[2ex] \dfrac{(h_1s+\alpha)\Big(h_2(n+1-k)+\beta)\Big)}{h_1h_2(n+1)+h_2\alpha+h_1\beta}, & s\le k\le n+1.\end{cases}$$

La expresión anterior fue obtenida por caminos diferentes e independientemente en los trabajos [2, 3].

A modo de ejemplo damos la expresión de la función de Green para el caso del Problema de Neumann regular, es decir, $h_1=h_2=0$ y como entonces necesariamente $q,\alpha,\beta>0$ las condiciones de contorno son equivalentes a $\mathscr{U}_1(z)=z(0)-z(1)$ y $\mathscr{U}_2(z)=z(n+1)-z(n)$ por lo que la función de Green está dada por la identidad

$$G_q(k,s)=\sqrt{\frac{2}{2+q}}\begin{cases}\dfrac{T_{2k-1}\left(\sqrt{\frac{2+q}{2}}\right)T_{2(n-s)+1}\left(\sqrt{\frac{2+q}{2}}\right)}{qU_{2n-1}\left(\sqrt{\frac{2+q}{2}}\right)}, & 0\le k\le s,\\[3ex] \dfrac{T_{2s-1}\left(\sqrt{\frac{2+q}{2}}\right)T_{2(n-k)+1}\left(\sqrt{\frac{2+q}{2}}\right)}{qU_{2n-1}\left(\sqrt{\frac{2+q}{2}}\right)}, & s\le k\le n+1.\end{cases}$$

2.2. Problema de Neumann no regular

El problema (4) no es regular si el correspondiente problema homogéneo tiene soluciones no nulas. Con las hipótesis efectuadas, sabemos que la única posibilidad de que esto ocurra es que $q=h_1=h_2=0$, es decir que el problema (4) sea el problema de Neumann, en cuyo caso se expresa como

$$\mathscr{L}(z)=f \ \text{ en } \ F, \qquad z(0)-z(1)=z(n+1)-z(n)=0. \tag{11}$$

Como las soluciones no triviales del problema (11) son las funciones constantes en P_n, la *Alternativa de Fredholm* indica que la condición necesaria y suficiente para que el problema (11) tenga solución es que $\sum_{k=1}^{n} f(k)=0$ y cuando esta condición se satisface entonces existe una única solución z tal que $\sum_{k=1}^{n} z(k)=0$. Cabe pues plantearse la construcción de funciones de Green también en el caso no regular.

Cualquier función de Green del problema (11) debe satisfacer las identidades

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}(G_0(\cdot,s)) = \varepsilon_s - \frac{1}{n} \ \text{ en } F,\\
&G_0(0,s) - G_0(1,s) = G_0(n+1,s) - G_0(n,s) = 0, \ 1 \le s \le n,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

donde ε_s es la *Delta de Dirac en* s. Si G_0 es una tal función entonces cualquier otra función H que satisfaga las identidades (12), debe expresarse necesariamente en la forma

$$
H(k,s) = G_0(k,s) + g(s), \quad 0 \le k,s \le n+1, \quad g \in \mathscr{C}(F). \tag{13}
$$

Como $z(k) = \dfrac{k(k-1)}{2n}$ satisface que $\mathscr{L}(\nu) = -\dfrac{1}{n}$ en F, para cada $1 \le s \le n$, la expresión de cada función de Green del problema (11) esta dada por

$$
G_0(k,s) = \frac{1}{2n}\begin{cases} \Big(a(s) + k\,b(s) + k\,(k-1)\Big), & 0 \le k \le s,\\[2mm] \Big(\hat{a}(s) + k\,\hat{b}(s) + k\,(k-1)\Big), & s \le k \le n+1. \end{cases}
$$

Como si $s \ne 0, n+1$ se tiene que

$$
G_0(0,s) - G_0(1,s) = -\frac{b(s)}{2n} \quad \text{y} \quad G_0(n+1,s) - G_0(n,s) = \frac{\hat{b}(s) + 2n}{2n}
$$

resulta que para que G_0 satisfaga las condiciones de contorno, necesariamente $b(s) = 0$ y $\hat{b}(s) = -2n$, mientras que la identidad $G_0(s,s) = \dfrac{a(s) + s(s-1)}{2n} = \dfrac{\hat{a}(s) + s(s-1-2n)}{2n}$ implica que necesariamente $\hat{a}(s) = a(s) + 2ns$. Como para los valores obtenidos de las funciones $\hat{a}, b$ y $\hat{b}$ se satisface que $\mathscr{L}(G_0(\cdot,s))(s) = 1 - \dfrac{1}{n}$, resulta que para cada $1 \le s \le n$, la expresión de todas las funciones de Green del problema (11) está dada por

$$
G_0(k,s) = a(s) + \frac{k\,(k-1)}{2n} + \begin{cases} 0, & 0 \le k \le s,\\[2mm] s-k, & s \le k \le n+1, \end{cases} \tag{14}
$$

donde $a \in \mathscr{C}(F)$.

Podemos determinar el valor de la función a imponiendo condiciones adicionales a la función (14). En particular, si planteamos la búsqueda de la *Función de*

Green ortogonal, es decir aquélla determinada por la propiedad $\sum\limits_{k=1}^{n} G_0(k,s)=0$ resulta que la función a debe satisfacer la identidad

$$a(s)=\frac{(2n-1)(n-1)}{6n}-\frac{s}{n}(n+1-s)$$

lo que implica para $1\le s\le n$, los valores de la única función de Green ortogonal en F están determinados por la expresión

$$G_0(k,s)=\frac{(2n-1)(n-1)}{6n}+\frac{k(k-1)+s(s-1)}{2n}-\begin{cases} s, \; 0\le k\le s, \\ \\ k, \; s\le k\le n+1. \end{cases}$$

Bibliografía

[1] MASON, J.C. and HANDSCOMB, D.C. *Chebyshev Polynomials*. Chapman & Hall, A CRC Press Company, 2003.

[2] BENDITO, A. CARMONA and ENCINAS, A. M. *Solving boundary value problems on networks using equilibrium measures*. *J. Funct. Anal.* **171** (2000), 155-176.

[3] CHUNG, F.R.K and YAU, S.T. *Discrete Green functions. J. Comb. Theory* (A), **91** (2000), 191-214.

[4] CHUNG, F.R.K et R. ELLIS, R. *A chip-firing game and Dirichlet eigenvalues. Discrete Math.*, **257** (2002), 341-355.

[5] NOVIKOV, S.P. *Schrödinger operators on graphs and symplectic geometry. The Arnoldfest (Toronto, ON, 1997)*, Fields Inst. Commun. **24**, Amer. Math. Soc. RI, (1999), 397–413.

[6] WOESS, W. *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*. Cambridge University Press, 2000.